Linhas de Transmissão - Parte - 3ª

Linha sem distorção:

Em uma linha sem perdas : $\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{LC}$
E a velocidade de fase:

$$u = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ (independente da frequência)

Assim, todas as freqüências propagam com a mesma velocidade ao longo da linha sem perdas.

Aplicações : modulação, sinais digitais, etc. (wideband)

Em uma linha não-ideal, a veloc. é f(ω) de ω.
Resultado : dispersão

Em uma L.T. de baixas perdas, $u \approx$ constante, a dispersão pode (ou não) ser um problema, depende do comprimento da linha
Se a linha é longa, pequenas variações em u podem produzir grandes distorções.

Existe um caso especial de linhas com perdas q/ produz prop. sem distorção.
Para isso :

$$\boxed{\frac{R}{L} = \frac{G}{C}}$$ será provado a seguir.

Lembrando : $\gamma = \alpha + j\beta$ (linha c/ perdas)

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{RG - \omega^2 LC + \left[(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)\right]^{1/2}}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-RG + \omega^2 LC + \left[(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)\right]^{1/2}}$$

dependência não-linear com ω.

Para que a linha seja sem dispersão, a constante de fase β deve ter uma dependência linear com a frequência.

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$= \sqrt{R\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right)\left(1 + j\omega \frac{C}{G}\right) G}$$

A única maneira da equação acima produzir uma dependência linear c/ ω é se

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{C}{G}$$

$\therefore$

$$\gamma = \sqrt{RG} \cdot \sqrt{\left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right)^2}$$

$$\gamma = \sqrt{RG} \cdot \left(1 + j\omega \frac{L}{R}\right) = \alpha + j\beta$$

$$\alpha = \sqrt{RG}$$

$$\beta = \omega \sqrt{RG}\, \frac{L}{R} = \underbrace{\omega \sqrt{\frac{G}{R}} \cdot L}_{\omega\sqrt{\frac{RG}{R^2}} \cdot L} = \underbrace{\omega \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot L}_{\frac{G}{R} = \frac{C}{L}} = \underbrace{\omega\sqrt{LC}}_{\omega\sqrt{\frac{C \cdot L^{\cancel{2}}}{\cancel{L}}}}$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC}$$

como $u = \dfrac{\omega}{\beta}$ veloc. fase

$\therefore$ $\boxed{u = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ independente da frequência.

As impedâncias de curto- e circuito aberto de uma L.T. são relacionadas às posições dos nulos de tensão e corrente ao longo da linha.

Em uma L.T. sem perdas, a magnitude de tensão e corrente são dadas por: (ver eqs. 10 e 11):

$$|V_s(z)| = \left| V_{s0}^{+} e^{-j\beta z} [1 + \Gamma(z)] \right| = |V_{s0}^{+}| \cdot |1 + \Gamma(z)| \qquad (17)$$

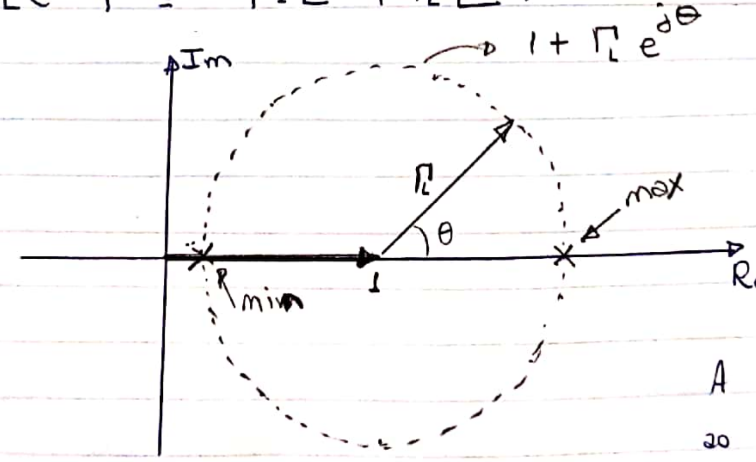
$$|I_s(z)| = \left| \frac{V_{s0}^{+}}{Z_0} e^{-j\beta z} [1 - \Gamma(z)] \right| = \frac{|V_{s0}^{+}|}{Z_0} |1 - \Gamma(z)| \qquad (18)$$

Com isso podemos determinar a relação de onda estacionária da linha. Para isso, precisamos encontrar os valores máximos e mínimos de tensão e corrente em 17 e 18.

$$s = \frac{|V_s(z)|_{max}}{|V_s(z)|_{min}} = \frac{|I_s(z)|_{max}}{|I_s(z)|_{min}} \qquad (19)$$

Para encontrar os valores máximos e mínimos, recorremos ao diagrama de "Crank (D.C.)": manivela.

$$|1 + \Gamma_L e^{j\theta}| = |1\angle 0^\circ + \Gamma_L \angle \theta|$$



A distância da origem ao respectivo ponto no círculo no D.C. representa a magnitude de $1 + \Gamma_L e^{j\theta}$

Assim:

$$|1+\Gamma(z)| = |1+\Gamma_L e^{j2\beta(z-\ell)}| \quad \text{quando } \theta = n(2\pi)$$

$n = 0, 1, 2$

$$|1+\Gamma(z)|_{max} = 1 + |\Gamma_L|$$

Analogamente,

$$|1+\Gamma(z)|_{min} = 1 - |\Gamma_L|$$

Logo, a relação de onda estacionária torna-se

$$s = \frac{|V_s(z)|_{max}}{|V_s(z)|_{min}} = \frac{|I_s(z)|_{max}}{|I_s(z)|_{min}} = \frac{1+|\Gamma_L|}{1-|\Gamma_L|} \quad (20)$$

As equações acima podem agora ser aplicadas p/ os casos especiais de LT sem perdas em aberto e em curto:

a) L.T. em aberto: $(\Gamma_L = 1)$

De (17), temos que:

$|V_s(z)| = 0$ sempre que $1 + \Gamma_L e^{j2\beta(z-\ell)} = 0$

ou seja: $e^{j2\beta(z-\ell)} = -1$

$$\therefore \; 2\beta(z-\ell) = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (z-\ell) = n\pi \quad (n \text{ impar})$$

$$\boxed{(z-\ell) = n\frac{\lambda}{4}} \quad (21)$$

ou seja, um nulo de tensão ocorre a uma distância de $\frac{\lambda}{4}$ da carga (e a cada $\lambda/2$ a partir desse ponto).

Nulo de tensão $\Rightarrow Z_{in} = 0$

Analogamente:

$|I_s(z)| = 0$ sempre que $1 - \Gamma_L e^{j2\beta(z-l)} = 0$

ou seja: $e^{j2\beta(z-l)} = +1$

$\therefore \; 2\beta(z-l) = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda}(z-l) = n\pi$ (n par)

$$\boxed{(z-l) = n\frac{\lambda}{4}}$$

ou seja, um nulo de corrente ocorre na carga e a cada $\frac{\lambda}{2}$ a partir desse ponto.

Nulo de corrente $\Rightarrow$ $Z_{in} = \infty$

b) Linha curto-circuitada. $\Gamma_L = -1$

$|V_s(z)| = 0$ sempre que $1 + \Gamma_L e^{j2\beta(z-l)} = 0$

ou seja: $e^{j2\beta(z-l)} = 1$

$2\beta(z-l) = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda}(z-l) = n\pi$ (n par)

$$\boxed{(z-l) = n\frac{\lambda}{4}}$$ n. par

Analogamente,

$|I_s(z)| = 0$ sempre que $1 - \Gamma_L e^{j2\beta(z-l)} = 0$

ou seja $e^{j2\beta(z-l)} = -1$

$2\beta(z-l) = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda}(z-l) = n\pi$ (n. impar)

$$\boxed{(z-\ell) = n\frac{\lambda}{4}}$$ n ímpar

Nulo de tensão no carga e a cada $\lambda/2$ a partir dela

Nulo de corrente a $\lambda/4$ da carga e a cada $\lambda/2$ desse ponto

Nulo tensão $\Rightarrow$ $Z_{in} = 0$

" corrente $\Rightarrow$ $Z_{in} = \infty$

Das equações p/ máximos e mínimos de tensão e corrente:

$$Z_0 = \frac{|V_s(z)|_{max}}{|I_s(z)|_{max}} = \frac{|V_s(z)|_{min}}{|I_s(z)|_{min}}$$ ver (17) e (18)

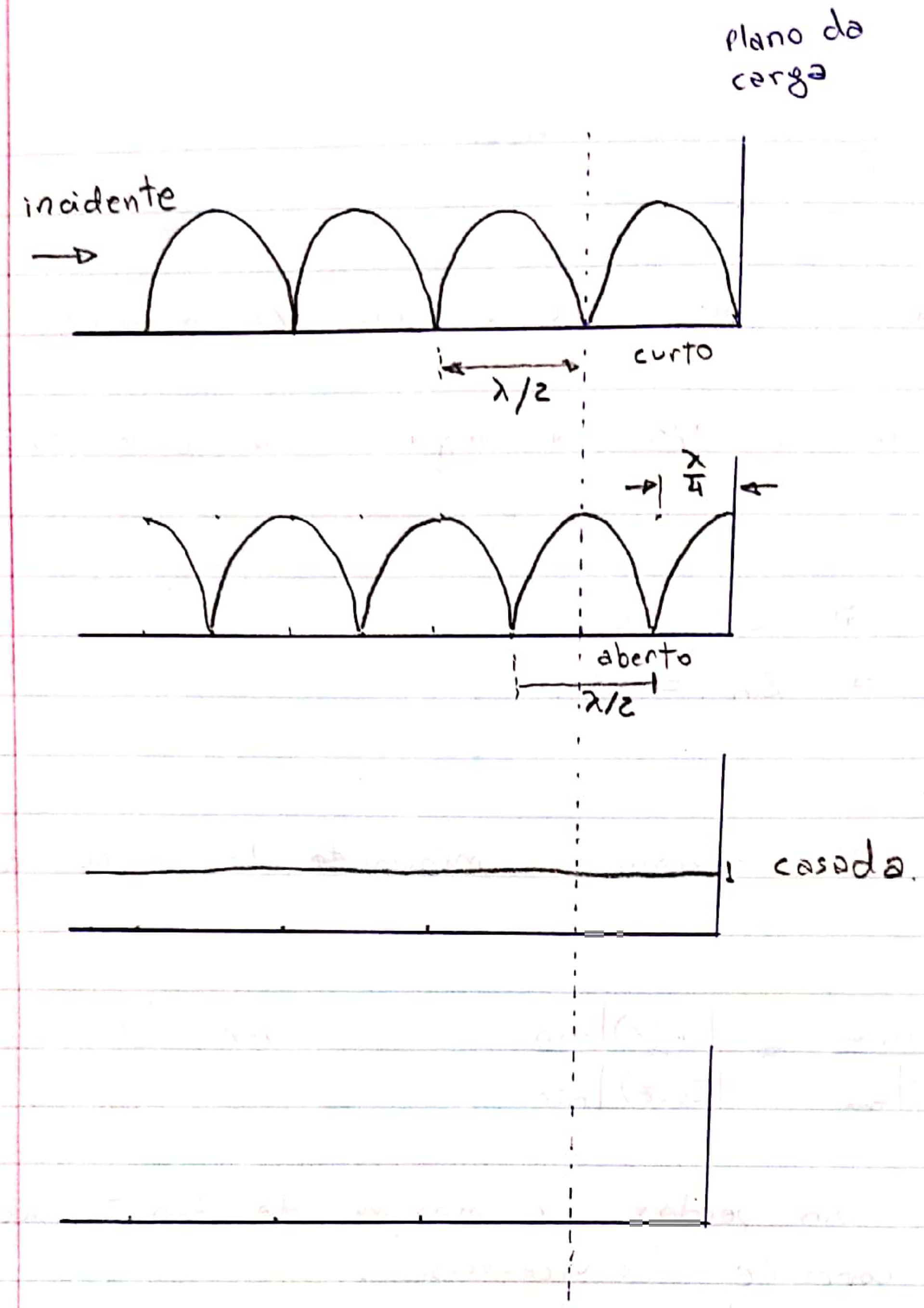
Em uma linha sem perdas, o máximo de tensão ocorre no mínimo de corrente (e vice-versa).
Usando a definição de onda estacionária, podemos definir o máximo e mínimo de impedância ao longo da L.T.:

$$|Z_{in}(z)|_{max} = \frac{|V_s(z)|_{max}}{|I_s(z)|_{min}} = s\cdot\frac{|V_s(z)|_{min}}{|I_s(z)|_{min}} = sZ_0$$

$$|Z_{in}(z)|_{min} = \frac{|V_s(z)|_{min}}{|I_s(z)|_{max}} = \frac{|V_s(z)|_{min}}{s\cdot|I_s(z)|_{min}} = \frac{Z_0}{s}$$

Ou seja, em uma L.T. sem perdas:

$$\frac{Z_0}{s} \leq Z_{in} \leq sZ_0$$



$$R = \frac{V}{I}$$